

3.绝对值的化简求值(二)

一、无条件的绝对值化简

1. 零点分段法

化简代数式 $|x+1|+|x-2|$ 时,可令 $x+1=0$ 和 $x-2=0$,分别求得 $x=-1$, $x=2$ (称 -1 , 2 分别为 $|x+1|$ 与 $|x-2|$ 的零点值).在实数范围内,零点值 $x=-1$ 和 $x=2$ 可将全体实数分成不重复且不遗漏的如下3种情况:

(1) $x < -1$;

(2) $-1 \leq x < 2$;

(3) $x \geq 2$.从而化简代数式 $|x+1|+|x-2|$ 可分以下3种情况:

①当 $x < -1$ 时,原式 $= -(x+1) - (x-2) = -2x+1$;

②当 $-1 \leq x < 2$ 时,原式 $= x+1 - (x-2) = 3$;

③当 $x \geq 2$ 时,原式 $= x+1 + x-2 = 2x-1$.

综上所述,原式 $= \begin{cases} -2x+1 & (x < -1) \\ 3 & (-1 \leq x < 2) \\ 2x-1 & (x \geq 2) \end{cases}$.

【总结】零点分段讨论法的一般步骤:

- ①找零点(使绝对值等于0的字母的值);
- ②分区间, n 个零点将数轴分成 $(n+1)$ 段(区间)、也即 $(n+1)$ 个要讨论的范围;
- ③先讨论,在 $(n+1)$ 段范围内分别对绝对值进行化简;
- ④再综合,最后用大括号的形式将上述讨论结果呈现.

 举个“栗子”

 栗子1

1. 化简: $-3|x+2|$

【答案】 $\begin{cases} -3x-6 & (x \geq -2) \\ 3x+6 & (x < -2) \end{cases}$

【解析】 $\begin{cases} -3x-6 & (x \geq -2) \\ 3x+6 & (x < -2) \end{cases}$

【标注】【知识点】零点分段法

栗子2

2. 化简： $|x-1|+|x-2|$.

【答案】原式 =
$$\begin{cases} -2x+3 & (x < 1) \\ 1 & (1 \leq x < 2) \\ 2x-3 & (x \geq 2) \end{cases} .$$

【解析】当 $x < 1$ 时 ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -(x-1) + [-(x-2)] \\ &= -x+1-x+2 = -2x+3 . \end{aligned}$$

当 $1 \leq x < 2$ 时 ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (x-1) + [-(x-2)] \\ &= x-1-x+2 = 1 . \end{aligned}$$

当 $x \geq 2$ 时 ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (x-1) + (x-2) \\ &= x-1+x-2 = 2x-3 . \end{aligned}$$

综上所述, 原式 =
$$\begin{cases} -2x+3 & (x < 1) \\ 1 & (1 \leq x < 2) \\ 2x-3 & (x \geq 2) \end{cases} .$$

【标注】【知识点】零点分段法

3. 化简： $|x-1|-|x-2|$.

【答案】
$$\begin{cases} x \leq 1 & -1 \\ 1 < x \leq 2 & 2x-3 \\ x > 2 & 1 \end{cases} .$$

【标注】【知识点】零点分段法

栗子3

4. $|x+1|+|x-2|+|x-3|$ 的值为 _____ .

【答案】
$$\begin{cases} -3x+4 & (x \leq -1) \\ -x+6 & (-1 < x \leq 2) \\ x+2 & (2 < x \leq 3) \\ 3x-4 & (x > 3) \end{cases}$$

【解析】 当 $x \leq -1$ 时, $|x+1| + |x-2| + |x-3| = -x-1-x+2-x+3 = -3x+4$;
 当 $-1 < x \leq 2$ 时, $|x+1| + |x-2| + |x-3| = x+1-x+2-x+3 = -x+6$;
 当 $2 < x \leq 3$ 时, $|x+1| + |x-2| + |x-3| = x+1+x-2-x+3 = x+2$;
 当 $x > 3$ 时, $|x+1| + |x-2| + |x-3| = x+1+x-2+x-3 = 3x-4$.
 综上所述, $|x+1| + |x-2| + |x-3|$ 的值为 $\begin{cases} -3x+4(x \leq -1) \\ -x+6(-1 < x \leq 2) \\ x+2(2 < x \leq 3) \\ 3x-4(x > 3) \end{cases}$.

【标注】【知识点】零点分段法

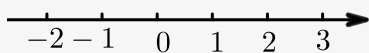
栗子4

5. $|x-3| + |x-2| + |x+1| + |x+2|$ 的最小值是 _____ .

【答案】 8

【解析】 $|x-3| + |x-2| + |x+1| + |x+2|$,

几何意义为: x 到 -1 、 -2 、 2 、 3 四个点的距离和, 表示在数轴上,



当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, 此时有最小值,

故将 $x = 2$ 代入:

最小值为 $1 + 0 + 3 + 4 = 8$.

【标注】【知识点】利用绝对值求最值

栗子5

6. 化简: $||2x-3|-1|$.

【答案】 答案见解析 .

【解析】 当 $x < 1$ 时, 原式 $= -(2x-3) - 1 = -2x+2$;

当 $1 \leq x < \frac{3}{2}$ 时, 原式 $= -[-(2x-3) - 1] = 2x-2$;

当 $\frac{3}{2} \leq x < 2$ 时, 原式 $= -[(2x-3) - 1] = -2x+4$;

当 $x \geq 2$ 时, 原式 $= (2x-3) - 1 = 2x-4$.

【标注】【知识点】零点分段法

二、绝对值的最值问题

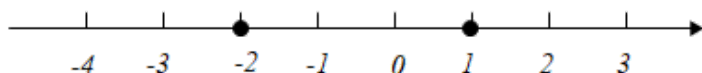
🗨 两个绝对值的和最小问题

1. 两个绝对值的和最小问题

比如，求 $|x-1|+|x+2|$ 的最小值，

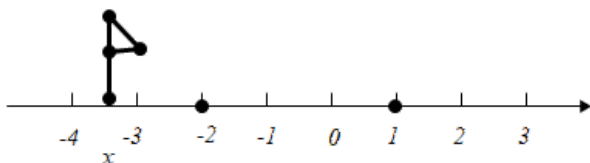
先翻译，原式几何意义为 x 对应点到1对应点与 x 对应点到-2对应点的距离和；

再画图，-2对应点与1对应点将数轴分成3个部分：-2对应点左边，-2对应点与1对应点之间，1对应点右边；

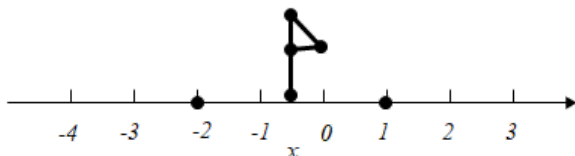


然后分类讨论：

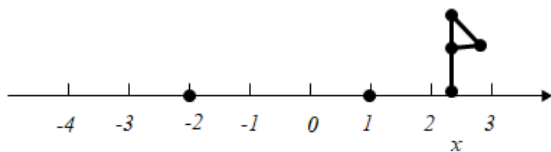
①若 x 对应点在-2对应点左边，则 x 对应点到-2对应点与 x 对应点到1对应点的距离和大于 3；



②若 x 对应点在-2对应点和1对应点之间，则 x 对应点到-2对应点与 x 对应点到1对应点的距离和等于 3；



③若 x 对应点在1对应点右边，则 x 对应点到-2对应点与 x 对应点到1对应点的距离和大于 3；



也就是说 x 对应点到-2对应点与 x 对应点到1对应点的距离和大于等于3，
从而 $|x-1|+|x+2|$ 的最小值为 3，此时 x 的范围是 $-2 \leq x \leq 1$ 。

栗子6

7. 当式子 $|x+2|+|x-10|$ 取得最小值时， x 的取值范围为（ ）。

- A. $-2 \leq x < 10$ B. $-2 \leq x \leq 10$ C. $x = -2$ 或 $x = 10$ D. $-2 < x \leq 10$

【答案】 B

【解析】 ① 当 $x < -2$ 时 ,

$$\text{原式} = -(x+2) - (x-10)$$

$$= -x - 2 - x + 10$$

$$= -2x + 8 > 12 .$$

② 当 $-2 \leq x \leq 10$ 时 ,

$$\text{原式} = x + 2 - (x - 10)$$

$$= x + 2 - x + 10$$

$$= 12 ,$$

③ 当 $x > 10$ 时 ,

$$\text{原式} = x + 2 + x - 10$$

$$= 2x - 8 > 12 ,$$

综上所述当 $-2 \leq x \leq 10$ 时 , 原式有最小值为 12 .

故选 B .

【标注】 【知识点】 利用绝对值求最值

栗子7

8. 代数式 $|x-4| + |x+5|$ 的最小值是 _____ .

【答案】 9

【解析】 $|x-4| + |x+5|$ 几何意义为数轴上表示 x 的点与 4 和 -5 的距离和 ,

当 $-5 \leq x \leq 4$ 时 , $|x-4| + |x+5|$ 有最小值为 : $4 - (-5) = 9$.

故答案为 : 9 .

【标注】 【知识点】 利用绝对值求最值

栗子8

9. 代数式 $|x-1| + |x+a|$ 的最小值是 2, 则 a 的值是 _____ .

【答案】 $a = 1$ 或 $a = -3$

【解析】 解 : $|x-1| + |x+a| \geq |a+1|$,

故 $|a+1|=2$ ，解得： $a=1$ 或 -3 ，

【标注】【知识点】利用绝对值求最值

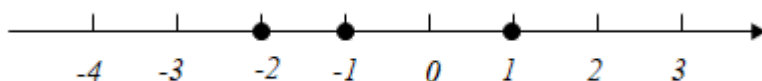
三个绝对值的和最小问题

2. 三个绝对值的和最小问题

比如，求 $|x-1|+|x+2|+|x+1|$ 的最小值，

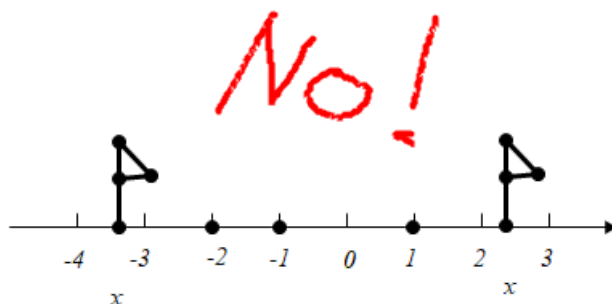
先翻译，原式几何意义为 x 对应点到1对应点、到-1对应点与到-2对应点的距离和；

再画图，-2对应点、-1对应点与1对应点将数轴分成4个部分：-2对应点左边、-2对应点与-1对应点之间、-1对应点与1对应点之间、1对应点右边；



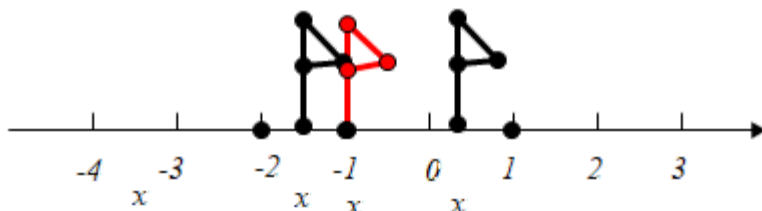
然后分类讨论：

①由上例可知，若 $|x-1|+|x+2|$ 要取最小值， x 对应点不能在-2对应点左边，也不能在1对应点右边；



所以 x 对应点应在-2对应点和1对应点之间，此时 $|x-1|+|x+2|$ 取到最小值—— x 对应点到-2对应点、到1对应点的距离和，等于3，原式 $\geq 3+|x+1|$ ；

② x 对应点应在-2对应点和1对应点之间，由图可知当 $x=-1$ 时， $|x+1|$ 即 x 对应点到-1对应点的距离最小；



所以 $|x-1|+|x+2|+|x+1|$ 的最小值为3，此时 x 的范围是 $x=-1$ 。

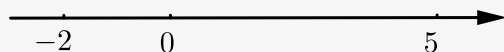
栗子9

10.

若 x 表示一个有理数，代数式 $|x+2|+|x-5|$ 的最小值是_____．代数式 $|x-1|+|x+2|+|x-5|$ 的最小值是_____．

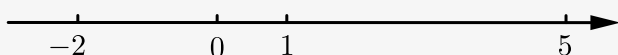
【答案】 7; 7

【解析】 对于 $|x+2|+|x-5|$ 表示 x 到-2与5的距离和，



当 $-2 \leq x \leq 5$ 时，有最小值7．

对于 $|x-1|+|x+2|+|x-5|$ 表示 x 到-2、1与5的距离之和，



当 $x=1$ 时，有最小值7．

故答案为：7；7．

【标注】【知识点】利用绝对值求最值

栗子10

11. 已知 $|x+2|+|1-x|=9-|y-5|-|1+y|$ ，求 $x+y$ 最大值与最小值．

【答案】 当 $x=1$ ， $y=5$ 时， $x+y$ 取得最大值为6．

当 $x=-2$ ， $y=-1$ 时， $x+y$ 的最小值为-3．

【解析】 原等式变形得： $|x+2|+|1-x|+|y-5|+|1+y|=9$ ，

$\because |x+2|+|x-1| \geq 3$ ， $|y-5|+|y+1| \geq 6$ ，且

$|x+2|+|1-x|+|y-5|+|1+y|=9$ ．

$|x+2|+|x-1|=3$ ， $|y-5|+|y+1|=6$ ，

$\therefore$ 当 $-2 \leq x \leq 1$ 时， $|x+2|+|x-1|=3$ ．

当 $-1 \leq y \leq 5$ 时， $|y-5|+|y+1|=6$ ．

$\therefore$ 当 $x=1$ ， $y=5$ 时， $x+y$ 取得最大值为6．

当 $x=-2$ ， $y=-1$ 时， $x+y$ 的最小值为-3．

【标注】【知识点】绝对值综合

栗子11

12.

同学们都知道： $|3 - (-2)|$ 表示3与-2之差的绝对值，实际上也可理解为3与-2两数在数轴上所对应的两点之间的距离．请你借助数轴进行以下探索：

- (1) 数轴上表示 x 与3的两点之间的距离可以表示为_____．
- (2) 如果 $|x - 3| = 5$ ，则 $x =$ _____．
- (3) 同理 $|x + 2| + |x - 1|$ 表示数轴上有理数 x 所对应的点到-2和1所对应的点的距离之和，请你找出所有符合条件的整数 x ，使得 $|x + 2| + |x - 1| = 3$ ，这样的整数是_____．
- (4) 由以上探索猜想对于任何有理数 x ， $|x + 3| + |x - 6|$ 是否有最小值？如果有，直接写出最小值；如果没有，说明理由．

【答案】 (1) $|x - 3|$

(2) 8或-2

(3) -2, -1, 0, 1

(4) 有最小值，9．

【解析】 (1) 数轴上表示 x 与3的两点之间的距离可以表示为 $|x - 3|$ ，

故答案为： $|x - 3|$ ．

(2) $\because |x - 3| = 5$ ，

$\therefore x - 3 = 5$ 或 $x - 3 = -5$ ，

解得： $x = 8$ 或 $x = -2$ ，

故答案为：8或-2．

(3) $\because |x + 2| + |x - 1|$ 表示数轴上有理数 x 所对应的点到-2和1所对应的点的距离之和，

$|x + 2| + |x - 1| = 3$ ，

$\therefore$ 这样的整数由-2、-1、0、1．

故答案为：-2、-1、0、1．

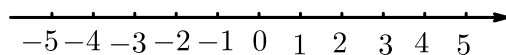
(4) 有最小值．

理由是： $\because |x + 3| + |x - 6|$ 理解为：在数轴上表示 x 到-3和6的距离之和，

$\therefore$ 当 x 在-3与6之间的线段上（即 $-3 \leq x \leq 6$ ）时，

即 $|x + 3| + |x - 6|$ 的值有最小值，最小值为 $6 + 3 = 9$ ．

【标注】【知识点】数轴上两点间距离



- (1) 数轴上表示3和2的两点之间的距离是 _____ , 表示-2和1两点之间的距离是 _____ , 一般地, 数轴上表示数 m 和数 n 的两点之间的距离等于 $|m - n|$.
- (2) 如果 $|x + 1| = 2$, 那么 $x =$ _____ .
- (3) 若 $|a - 3| = 4$, $|b + 2| = 3$, 且数 a , b 在数轴上表示的数分别是点 A , 点 B , 则 A , B 两点间的最大距离是 _____ , 最小距离是 _____ .
- (4) 若数轴上表示数 a 的点位于-3与5之间, 则 $|a + 3| + |a - 5| =$ _____ .
- (5) 当 $a =$ _____ 时, $|a - 1| + |a + 5| + |a - 4|$ 的值最小, 最小值是 _____ .

【答案】 (1) 1; 3

(2) 1或-3

(3) 12; 2

(4) 8

(5) 1; 9

【解析】 (1) 数轴上表示3和2的两点之间的距离是： $3 - 2 = 1$, 表示-2和1两点之间的距离是： $1 - (-2) = 3$.

(2) $|x + 1| = 2$,

$$x + 1 = 2 \text{ 或 } x + 1 = -2 ,$$

$$x = 1 \text{ 或 } x = -3 .$$

(3) $\because |a - 3| = 4$, $|b + 2| = 3$,

$$\therefore a = 7 \text{ 或 } -1 , b = 1 \text{ 或 } -5 ,$$

当 $a = 7$, $b = -5$ 时, 则 A , B 两点间的最大距离是12 ,

当 $a = 1$, $b = -1$ 时, 则 A , B 两点间的最小距离是2 ,

则 A , B 两点间的最大距离是12 , 最小距离是2 .

(4) 若数轴上表示数 a 的点位于-3与5之间 ,

$$|a + 3| + |a - 5| = (a + 3) + (5 - a) = 8 .$$

(5) 当 $a \geq 4$ 时, 原式 $= a + 5 + a - 1 + a - 4 = 3a$, 这时的最小值为 $3 * 4 = 12$.

当 $1 \leq a < 4$ 时, 原式 $= a + 5 + a - 1 - a + 4 = a + 8$, 这时的最小值为 $1 + 8 = 9$.

当 $-5 \leq a < 1$ 时, 原式 $= a + 5 - a + 1 - a + 4 = -a + 10$, 这时的最小值接近为 $1 + 8 = 9$.

当 $a \leq -5$ 时, 原式 $= -a - 5 - a + 1 - a + 4 = -3a$, 这时的最小值为 $-3 * (-5) = 15$.

综上可得当 $a = 1$ 时，式子的最小值为9.

【标注】【知识点】绝对值综合

栗子13

14. 请解答下列各题：

- (1) 数轴上表示 x 和 -2 的两点 A 和 B 之间的距离表示为 _____ , 如果 $|AB| = 5$, 那么 $x =$ _____ .
- (2) 若点 A 表示的整数为 x , 则当 $x =$ _____ 时 , $|x + 4| = |x - 2|$.
- (3) 要使 $|x + 3| + |x - 2|$ 取最小值时 , 相应的 x 的取值范围是 _____ , 最小值是 _____ .
- (4) 已知 $|x + 2| + |x - 1| + |y + 1| + |y - 2| = 6$, 则 $x + 2y$ 的最大值为 _____ , 最小值为 _____ .

【答案】(1) $|x + 2|$; 3或 -7

(2) -1

(3) $-3 \leq x \leq 2$; 5

(4) 5 ; -4

【解析】(1) $\because x$ 和 -2 两点距离为 $|x - (-2)| = |x + 2|$,

又 $\because |AB| = 5$,

$\therefore |x + 2| = 5$,

$\therefore x = 3$ 或 $x = -7$.

(2) $\because |x + 4| = |x - 2|$,

$\therefore x + 4 = x - 2$ 或 $x + 4 + x - 2 = 0$,

$\therefore x = -1$.

(3) ①当 $x \geq 2$ 时 ,

$|x + 3| + |x - 2| = 2x + 1$,

$\therefore (|x + 3| + |x - 2|)_{\min} = 5$;

②当 $-3 < x < 2$ 时 ,

$|x + 3| + |x - 2| = 5$;

③当 $x \leq -3$ 时 ,

$|x + 3| + |x - 2| = -x - 3 + 2 - x = -1 - 2x$,

$\therefore (|x + 3| + |x - 2|)_{\min} = 5$.

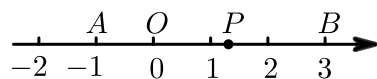
(4) $\because |x + 2| + |x - 1| \geq 3$,

$$\begin{aligned}
 &|y+1|+|y-2|\geqslant 3, \\
 &\because |x+2|+|x-1|+|y+1|+|y-2|=6, \\
 &\therefore |x+2|+|x-1|=3, \\
 &|y+1|+|y-2|=3, \\
 &\therefore -2\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 2, \\
 &\therefore (x+2y)_{\max}=5, (x+2y)_{\min}=-4.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】绝对值综合

独步天下

15. 数轴上两点之间的距离等于相对应的两数差的绝对值.



- (1) 数轴上表示2和5的两点之间的距离是 _____ ; 数轴上表示-2和-8的两点之间的距离是 _____ .
- (2) 数轴上表示数 x 和-1的两点之间的距离是2, 那么 x 为 _____ .
- (3) 若某动点表示的数为 x , 当式子 $|x+1|+|x-2|$ 取得最小值时, 相应的 x 的范围是 _____ .
- (4) 若某动点表示的数为 x , 已知数轴上两点 A 、 B 对应的数分别为-1、3, 点 P 为点 A 点 B 之间的一点(不与 A , B 重合), 点 P 对应的数为 p . 则式子 $|x-p|+|x-3|+|x-p-15|$ 的最小值是 _____ .

【答案】(1) 3; 6

(2) -3或1

(3) $-1\leqslant x\leqslant 2$

(4) 15

【解析】(1) 数轴上表示2和5的两点之间的距离是: $|5-2|=3$.

数轴上表示-2和-8的两点之间的距离是: $|(-2)-(-8)|=6$.

故答案为: 3, 6.

(2) $\because$ 数轴上表示数 x 和-1的两点之间的距离是2,

$$\therefore |x-(-1)|=2,$$

$$\therefore x+1=2 \text{ 或者 } x+1=-2,$$

$$\therefore x \text{ 为 } -3 \text{ 或 } 1.$$

故答案为: -3或1.

(3) 若某动点表示的数为 x ,

当 $|x + 1| + |x - 2|$ 取得最小值时 , 最小值为3 ,

此时 x 在-1和2之间 , 包括-1和2 ,

$\therefore$ 相应的 x 的范围是 $-1 \leq x \leq 2$.

故答案为 : $-1 \leq x \leq 2$.

(4) 由图示可知 , $-1 < p < 3$, 式子 $|x - p| + |x - 3| + |x - p - 15|$ 的意义是表示 x 的点到 P 、3、 $p + 15$ 这三个点距离之和 ,

当 $p \leq x \leq 3$ 时 ,

$$|x - p| + |x - 3| + |x - p - 15| = x - p - x + 3 - p + p + 15 = 18 - p ,$$

$p = 3$ 时 , $18 - p = 15$;

当 $3 \leq p \leq p + 15$ 时 ,

$$|x - p| + |x - 3| + |x - p - 15| = x - p + x - 3 - x + p + 15 = x + 12 ,$$

$x = 3$ 时 , $x + 12 = 15$;

当 $x < p$ 或者 $x > p + 15$ 时 , $|x - p| + |x - 3| + |x - p - 15| > |p + 15 - p|$,

即 $|x - p| + |x - 3| + |x - p - 15| > 15$;

$\therefore$ 式子 $|x - p| + |x - 3| + |x - p - 15|$ 的最小值是15 .

故答案为 : 15 .

【标注】【知识点】结合数轴化简绝对值